Atterrir ici.

La formule (6.100) est maintenant prouvée, et nous voyons que les nombres de Bernoulli sont liés aux termes constants des polynômes de Stirling :

$$\frac{B_m}{m!} = -m\sigma_m(0). \tag{6.101}$$

6.6 NOMBRES DE FIBONACCI

Nous voici arrivés à la suite de nombres qui est peut-être la plus agréable de toutes, la suite de Fibonacci $\langle F_n \rangle$:

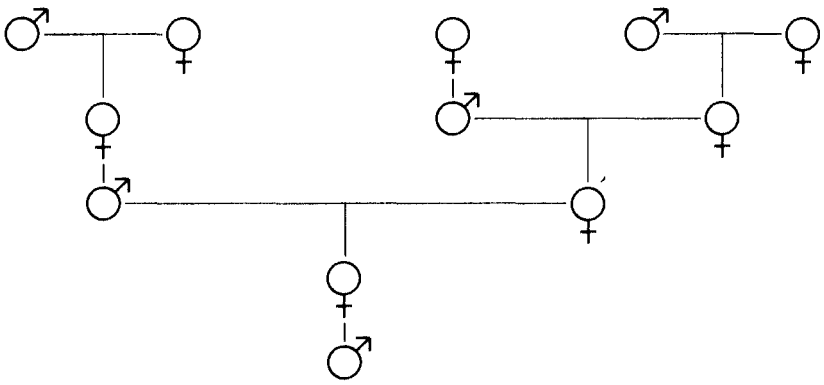
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

A la différence des nombres harmoniques et des nombres de Bernoulli, les nombres de Fibonacci sont des entiers. Ils sont définis par la récurrence

$$\begin{aligned} F_0 &= 0; \qquad F_1 = 1; \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2}, \qquad \text{pour } n > 1. \end{aligned} \tag{6.102}$$

C'est parce que cette règle est très simple — la plus simple possible dans laquelle chaque nombre dépend des deux précédents — que les nombres de Fibonacci apparaissent naturellement dans des situations très variées.

Les arbres généalogiques d'abeilles en sont un bon exemple. Considérons l'ascendance d'une abeille mâle. Chaque mâle (qu'on appelle aussi faux bourdon) est produit de façon asexuée par une femelle (qu'on appelle reine). Par contre, chaque femelle a deux parents, un mâle et une femelle. Voici les premiers niveaux de l'arbre :



Le faux bourdon a un grand-père et une grand-mère, un arrière grand-père et deux arrière-grand-mères, deux arrière-arrière-grands-pères et trois

arrière-arrière-grand-mères. On montre facilement par induction qu'il a en fait exactement F_{n+1} arrière^n-grands-pères et F_{n+2} arrière^n-grand-mères.

Les nombres de Fibonacci sont très présents dans la nature. Par exemple, les fleurs de tournesol forment des sortes de spirales compactes, ayant généralement 34 rayons dans un sens et 55 dans l'autre, ou 21 et 34 respectivement, ou encore 13 et 21. On a même découvert un jour en Angleterre un tournesol géant avec 89 et 144 spirales. On trouve des motifs similaires dans les fruits de certains conifères.

Phyllotaxie, n. f. Attirance pour les taxis.

Voici un exemple d'un autre genre [277]. Supposons que nous mettions deux plaques de verre face contre face. De combien de façons possibles a_n un rayon de lumière peut-il traverser les deux plaques ou être réfléchi après avor changé de direction n fois ? Un petit dessin valant mieux qu'un long discours, voici les premiers cas possibles :

$a_0 = 1$ $a_1 = 2$ $a_2 = 3$ $a_3 = 5$

Lorsque n est pair, le nombre de réflexions est pair et le rayon franchit les deux plaques. Lorsque n est impair, le rayon finit par retourner du côté d'où il est parti. On dirait bien que les a_n sont des nombres de Fibonacci. Pour confirmer cela, regardons d'un peu plus près le parcours d'un rayon sujet à n réflexions, lorsque $n \geqslant 2$: soit il est réfléchi d'abord par la deuxième surface (la plus éloignée de son point de départ) et peut continuer son parcours de a_{n-1} façons différentes, soit il est réfléchi d'abord par la surface du milieu, puis encore une fois pour finir son trajet de a_{n-2} manières possibles. On retrouve ainsi la récurrence de Fibonacci $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Les conditions initiales sont juste un peu différentes, car $a_0 = 1 = F_2$ et $a_1 = 2 = F_3$; tout est donc simplement décalé de deux places, et $a_n = F_{n+2}$.

C'est Leonardo Fibonacci qui introduisit ces nombres en 1202. Par la suite, les mathématiciens se mirent à découvrir des choses de plus en plus intéressantes à leur propos. Edouard Lucas, l'homme de la Tour de Hanoi que nous avons étudiée au chapitre 1, les étudia intensivement au cours de la deuxième moitié du dix-neuvième siècle (c'est même lui qui popularisa le nom de "nombres de Fibonacci"). Il obtint des résultats étonnants : par exemple, il utilisa les propriétés des nombres de Fibonacci pour démontrer que le nombre de Mersenne à 39 chiffres $2^{127} - 1$ est premier.

"La suite de Fibonacci possède des propriétés nombreuses fort intéressantes."
—E. Lucas [259]

L'identité suivante, que l'astronome français Jean-Dominique Cassini publia en 1680 [51], est l'un des plus anciens théorèmes sur les nombres de Fibonacci (en fait, Johannes Kepler le connaissait déjà en 1608 [202]) :

$$F_{n+1} F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n, \qquad \text{pour } n > 0. \tag{6.103}$$

Lorsque $n = 6$ par exemple, l'identité de Cassini prétend, avec raison, que $13 \cdot 5 - 8^2$ est égal à 1.

Toute formule polynomiale qui contient des nombres de Fibonacci de la forme $F_{n\pm k}$, pour des petites valeurs de k, peut être convertie en une formule où n'apparaissent que des F_n et des F_{n+1}. A cette fin, on utilise la règle

$$F_m = F_{m+2} - F_{m+1} \tag{6.104}$$

pour exprimer F_m en fonction de nombres de Fibonacci plus grands lorsque $m < n$, et

$$F_m = F_{m-2} + F_{m-1} \tag{6.105}$$

pour remplacer F_m par des nombres de Fibonacci plus petits lorsque $m > n + 1$. Ainsi, par exemple, on peut remplacer F_{n-1} par $F_{n+1} - F_n$ dans (6.103) pour obtenir une autre forme de l'identité de Cassini :

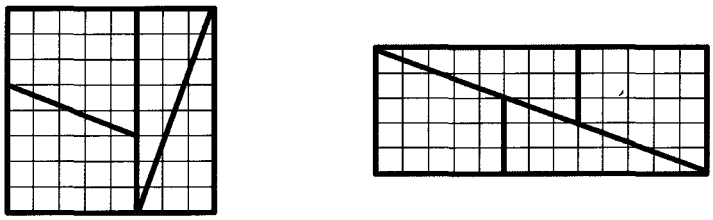
$$F_{n+1}^2 - F_{n+1} F_n - F_n^2 = (-1)^n . \tag{6.106}$$

Remarquons que l'identité originale de Cassini s'écrit

$$F_{n+2} F_n - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$$

si on remplace n par $n + 1$; c'est équivalent à la formule $(F_{n+1} + F_n)F_n - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$, qui est elle-même équivalente à (6.106). Par conséqent, Cassini(n) est vrai si et seulement si Cassini($n+1$) est vrai, et donc l'équation (6.103) est vraie pour tout n, par induction.

L'identité de Cassini est à la base d'un paradoxe géométrique qui était l'un des casse-tête favoris de Lewis Carroll [63], [319], [364]. Il s'agit de prendre un échiquier et de le couper en quatre parts, comme sur le dessin, puis de disposer ces parts pour former un rectangle :



Problème : l'échiquier comportait $8 \times 8 = 64$ cases et le rectangle en contient $5 \times 13 = 65$! De façon similaire, on peut découper n'importe quel carré $F_n \times F_n$ en quatre parts ayant F_{n+1}, F_n, F_{n-1}, et F_{n-2} dans leurs dimensions (celles de l'exemple sont 13, 8, 5 et 3). On obtient un rectangle $F_{n-1} \times F_{n+1}$.

D'après (6.103), on a ainsi gagné ou perdu une case, selon que n est pair ou impair.

Le paradoxe s'explique par le fait que... non, un magicien ne dévoile jamais ses trucs.

A strictement parler, l'identité (6.105) ne peut s'appliquer que si $m \geqslant 2$, car nous n'avons pas défini F_n pour n strictement négatif. Pour faciliter les choses, supprimons donc cette condition et définissons les nombres de Fibonacci négatifs au moyen des expressions (6.104) et (6.105). Par exemple, F_{-1} est égal à $F_1 - F_0 = 1$ et F_{-2} vaut $F_0 - F_{-1} = -1$. Au vu des premières valeurs,

n	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7	−8	−9	−10	−11
F_n	0	1	−1	2	−3	5	−8	13	−21	34	−55	89

il est clair (et cela se prouve par induction) que

$$F_{-n} = (-1)^{n-1}F_n\,, \qquad n \text{ entier.} \tag{6.107}$$

Ainsi, l'identité de Cassini (6.103) est vraie pour *tout* entier n, et non plus seulement pour $n > 0$.

Si on applique de façon répétée les équations (6.105) et (6.104), on obtient des expressions de $F_{n\pm k}$ en fonction de F_n et F_{n+1} :

$$\begin{aligned} F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n & F_{n-1} &= F_{n+1} - F_n \\ F_{n+3} &= 2F_{n+1} + F_n & F_{n-2} &= -F_{n+1} + 2F_n \\ F_{n+4} &= 3F_{n+1} + 2F_n & F_{n-3} &= 2F_{n+1} - 3F_n \\ F_{n+5} &= 5F_{n+1} + 3F_n & F_{n-4} &= -3F_{n+1} + 5F_n \end{aligned}$$

On y distingue facilement le motif

$$F_{n+k} = F_kF_{n+1} + F_{k-1}F_n\,, \tag{6.108}$$

valable pour tous entiers k et n, et facilement démontrable par induction.

En posant $k = n$ dans (6.108), on trouve que

$$F_{2n} = F_nF_{n+1} + F_{n-1}F_n\,, \tag{6.109}$$

donc que F_{2n} est un multiple de F_n. De même,

$$F_{3n} = F_{2n}F_{n+1} + F_{2n-1}F_n\,,$$

et F_{3n} est aussi un multiple de F_n. Par induction encore, on prouve que

$$F_{kn} \text{ est un multiple de } F_n\,, \tag{6.110}$$

pour tous entiers k et n. Ceci explique pourquoi F_{15} (qui vaut 610) est à la fois un multiple de F_3 et de F_5 (qui valent respectivement 2 et 5). Il y a

même plus encore : l'exercice 27 montre que

$$\text{pgcd}(F_m, F_n) = F_{\text{pgcd}(m,n)}. \tag{6.111}$$

Par exemple, $\text{pgcd}(F_{12}, F_{18}) = \text{pgcd}(144, 2584) = 8 = F_6$.

Nous pouvons maintenant démontrer une proposition presque réciproque de (6.110) : si $n > 2$ et F_m est un multiple de F_n, alors m est un multiple de n. En effet, si $F_n \backslash F_m$, alors $F_n \backslash \text{pgcd}(F_m, F_n) = F_{\text{pgcd}(m,n)} \leqslant F_n$. Cela n'est possible que si $F_{\text{pgcd}(m,n)} = F_n$; donc $\text{pgcd}(m, n) = n$ car $n > 2$. Yuri Matijasevich se sert d'une extension de ce résultat dans sa célèbre preuve [266] du fait qu'il n'existe pas d'algorithme permettant de décider si une équation polynomale à plusieurs variables et coefficients entiers a une solution en nombres entiers. Le lemme qu'il utilise est le suivant : pour tout $n > 2$, le nombre de Fibonacci F_m est un multiple de F_n^2 si et seulement si m est un multiple de nF_n.

Nous allons le démontrer en observant la suite $\langle F_{kn} \bmod F_n^2 \rangle$ pour $k = 1, 2, 3, \ldots$ pour voir à quels moments $F_{kn} \bmod F_n^2 = 0$ (nous savons déjà que m doit être un multiple de n pour que $F_m \bmod F_n = 0$). D'abord nous avons $F_n \bmod F_n^2 = F_n$; ce n'est pas nul. Puis

$$F_{2n} = F_n F_{n+1} + F_{n-1} F_n \equiv 2F_n F_{n+1} \pmod{F_n^2},$$

d'après (6.108), car $F_{n+1} \equiv F_{n-1} \pmod{F_n}$. De même,

$$F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2 \equiv F_{n+1}^2 \pmod{F_n^2}.$$

Cette congruence nous permet de calculer

$$\begin{aligned} F_{3n} &= F_{2n+1} F_n + F_{2n} F_{n-1} \\ &\equiv F_{n+1}^2 F_n + (2F_n F_{n+1}) F_{n+1} = 3F_{n+1}^2 F_n \pmod{F_n^2}; \\ F_{3n+1} &= F_{2n+1} F_{n+1} + F_{2n} F_n \\ &\equiv F_{n+1}^3 + (2F_n F_{n+1}) F_n \equiv F_{n+1}^3 \pmod{F_n^2}. \end{aligned}$$

Plus généralement, on prouve par induction sur k que

$$F_{kn} \equiv kF_n F_{n+1}^{k-1} \quad \text{et} \quad F_{kn+1} \equiv F_{n+1}^k \pmod{F_n^2}.$$

Comme F_{n+1} est premier par rapport à F_n, on a

$$\begin{aligned} F_{kn} \equiv 0 \pmod{F_n^2} &\iff kF_n \equiv 0 \pmod{F_n^2} \\ &\iff k \equiv 0 \pmod{F_n}. \end{aligned}$$

Nous avons ainsi démontré le lemme de Matijasevich.

Voici maintenant l'une des propriétés les plus importantes des nombres de Fibonacci. Il s'agit d'un système de représentation des nombres entiers. Convenons de la notation suivante :

$$j \gg k \qquad \Longleftrightarrow \qquad j \geqslant k+2\,. \tag{6.112}$$

Alors *tout entier strictement positif peut s'écrire de façon unique sous la forme*

$$n = F_{k_1} + F_{k_2} + \cdots + F_{k_r}\,, \qquad k_1 \gg k_2 \gg \cdots \gg k_r \gg 0. \tag{6.113}$$

Cette propriété constitue le "théorème de Zeckendorf" [246], [381]. Par exemple, le nombre un million s'écrit

$$\begin{aligned} 1000000 &= 832040 + 121393 + 46368 + 144 + 55 \\ &= F_{30} + F_{26} + F_{24} + F_{12} + F_{10}\,. \end{aligned}$$

Pour trouver la représentation d'un nombre, on peut toujours opérer de manière "gloutonne", en prenant pour F_{k_1} le plus grand nombre de Fibonacci $\leqslant n$, puis pour F_{k_2} le plus grand qui est $\leqslant n - F_{k_1}$, et ainsi de suite. Voyons cela plus précisément : supposons que $F_k \leqslant n < F_{k+1}$; donc $0 \leqslant n - F_k < F_{k+1} - F_k = F_{k-1}$. Si n est un nombre de Fibonacci, alors $r = 1$, $k_1 = k$ et (6.113) est respectée. Sinon, par induction sur n, $n - F_k$ peut s'écrire $F_{k_2} + \cdots + F_{k_r}$; et (6.113) est respectée si on pose $k_1 = k$, car les inégalités $F_{k_2} \leqslant n - F_k < F_{k-1}$ entraînent que $k \gg k_2$.

Réciproquement, si n s'écrit comme en (6.113), alors

$$F_{k_1} \leqslant n < F_{k_1+1}\,,$$

car la plus grande valeur possible de $F_{k_2} + \cdots + F_{k_r}$ lorsque $k \gg k_2 \gg \cdots \gg k_r \gg 0$ est

$$F_{k-2} + F_{k-4} + \cdots + F_{k \bmod 2+2} = F_{k-1} - 1\,, \qquad \text{si } k \geqslant 2. \tag{6.114}$$

Cette formule se prouve facilement par induction sur k (le membre gauche est nul lorsque k égale 2 ou 3). Par conséquent, k_1 est bien la valeur choisie par l'approche gloutonne décrite plus haut, et la représentation est unique.

Tout système qui donne une représentation unique des nombres est un système de numération. Le théorème de Zeckendorf conduit donc naturellement au *système de numération de Fibonacci.* Tout entier positif ou nul n peut être représenté par une suite de 0 et de 1, en convenant que

$$n = (b_m b_{m-1} \ldots b_2)_F \qquad \Longleftrightarrow \qquad n = \sum_{k=2}^{m} b_k F_k\,. \tag{6.115}$$

Ce système de numération rappelle le système binaire, mais ici on ne pourra jamais trouver deux chiffres 1 adjacents. Voici par exemple les nombres de 1 à 20 selon notre nouveau système :

$$\begin{array}{llll}
1 = (000001)_F & 6 = (001001)_F & 11 = (010100)_F & 16 = (100100)_F \\
2 = (000010)_F & 7 = (001010)_F & 12 = (010101)_F & 17 = (100101)_F \\
3 = (000100)_F & 8 = (010000)_F & 13 = (100000)_F & 18 = (101000)_F \\
4 = (000101)_F & 9 = (010001)_F & 14 = (100001)_F & 19 = (101001)_F \\
5 = (001000)_F & 10 = (010010)_F & 15 = (100010)_F & 20 = (101010)_F
\end{array}$$

On peut comparer le représentation de Fibonacci du nombre un million, que nous avons vue il y a un instant, avec sa représentation binaire $2^{19} + 2^{18} + 2^{17} + 2^{16} + 2^{14} + 2^9 + 2^6$:

$$\begin{aligned}
(1000000)_{10} &= (1000101000000000000101000000000)_F \\
&= (11110100001001000000)_2 .
\end{aligned}$$

La représentation de Fibonacci est un peu plus longue, du fait qu'on n'y autorise pas les 1 adjacents. A ceci près, les deux représentations sont analogues.

Pour ajouter 1 à un nombre dans le système de Fibonacci, deux cas se présentent. Si le "chiffre des unités" est 0, on le remplace par 1 ; on ajoute ainsi $F_2 = 1$, car le chiffre des unités correspond à F_2. Sinon, on remplace les deux chiffres de droite, qui sont forcément 01, par 10, ce qui a pour effet d'ajouter $F_3 - F_2 = 1$. Pour finir, il faut faire autant de "retenues" que nécessaire, en remplaçant le motif "011" par "100", pour supprimer les éventuels chiffres 1 consécutifs dans la représentation. Faire une telle retenue équivaut en fait à remplacer $F_{m+1} + F_m$ par F_{m+2}. Par exemple, pour passer de $5 = (1000)_F$ à $6 = (1001)_F$ ou de $6 = (1001)_F$ à $7 = (1010)_F$, pas besoin de retenue ; par contre, il en faut deux pour passer de $7 = (1010)_F$ à $8 = (10000)_F$.

Nous avons présenté jusqu'ici beaucoup de propriétés des nombres de Fibonacci, mais nous n'avons pas dit un mot sur une éventuelle forme close. Nous n'en avons pas trouvé pour les nombres de Stirling, pas plus que pour les nombres eulériens, ni pour les nombres de Bernoulli ; en revanche, nous avons su découvrir la forme close $H_n = \left[{n+1 \atop 2}\right]/n!$ pour les nombres harmoniques. Alors, existe-t-il une relation entre les F_n et d'autres quantités que nous connaissons ? Est-il possible de "résoudre" la récurrence qui définit F_n ?

La réponse est oui. En fait, la récurrence est facile à résoudre si on utilise l'idée de *fonction génératrice* que nous avons vue rapidement au

chapitre 5. Considérons la série infinie

$$F(z) = F_0 + F_1 z + F_2 z^2 + \cdots = \sum_{n \geqslant 0} F_n z^n . \tag{6.116}$$

Si nous trouvons une formule simple pour $F(z)$, il y a de bonnes chances pour que nous puissions trouver aussi une formule simple pour ses coefficients F_n.

"Sit $1 + x + 2xx + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + 13x^6 + 21x^7 + 34x^8$ &c Series nata ex divisione Unitatis per Trinomium $1 - x - xx$."
—A. de Moivre [76]

Nous verrons les fonctions génératrices en détail au chapitre 7, mais l'exemple que nous allons étudier maintenant nous sera bien utile d'ici là. Si on regarde attentivement ce qui se passe lorsqu'on multiplie la série $F(z)$ par z et par z^2, on découvre une bien jolie propriété :

$$\begin{aligned} F(z) &= F_0 + F_1 z + F_2 z^2 + F_3 z^3 + F_4 z^4 + F_5 z^5 + \cdots , \\ zF(z) &= \qquad F_0 z + F_1 z^2 + F_2 z^3 + F_3 z^4 + F_4 z^5 + \cdots , \\ z^2 F(z) &= \qquad\qquad F_0 z^2 + F_1 z^3 + F_2 z^4 + F_3 z^5 + \cdots . \end{aligned}$$

"The quantities r, s, t, which show the relation of the terms, are the same as those in the denominator of the fraction. This property, howsoever obvious it may be, M. DeMoivre was the first that applied it to use, in the solution of problems about infinite series, which otherwise would have been very intricate."
—J. Stirling [343]

En soustrayant les deux dernières équations de la première, tous les termes en z^2, z^3, z^4,... disparaissent à cause de la récurrence de Fibonacci. Tout ce qui reste alors, c'est $(F_1 - F_0)z = z$, car le coefficient F_0 est nul. En d'autres termes,

$$F(z) - zF(z) - z^2 F(z) = z ,$$

ce qui donne la formule

$$F(z) = \frac{z}{1 - z - z^2} . \tag{6.117}$$

Toute l'information sur la suite de Fibonacci se trouve maintenant concentrée dans la simple expression $z/(1-z-z^2)$. Bien que cette expression ne nous dise rien a priori, nous avons fait un grand pas. En effet, en factorisant le dénominateur puis en développant en éléments simples, nous pouvons aboutir à une formule qu'il nous sera facile de développer en série. L'expression des coefficients de cette série constituera alors une forme close des nombres de Fibonacci.

Le plan d'attaque que nous venons de concocter sera peut-être plus clair si nous le détaillons en commençant par la fin. Supposons que nous ayons une fonction génératrice plus simple, disons $1/(1 - \alpha z)$ où α est une constante. Dans ce cas, nous connaissons tous les coefficients des puissances de z car

$$\frac{1}{1 - \alpha z} = 1 + \alpha z + \alpha^2 z^2 + \alpha^3 z^3 + \cdots .$$

De même, si la fonction génératrice est de la forme $A/(1 - \alpha z) + B/(1 - \beta z)$,

les coefficients sont faciles à déterminer du fait que

$$\begin{aligned}\frac{A}{1-\alpha z}+\frac{B}{1-\beta z} &= A\sum_{n\geqslant 0}(\alpha z)^n + B\sum_{n\geqslant 0}(\beta z)^n \\ &= \sum_{n\geqslant 0}(A\alpha^n + B\beta^n)z^n\,. \qquad (6.118)\end{aligned}$$

Par conséquent, il nous suffit de trouver des constantes A, B, α et β telles que

$$\frac{A}{1-\alpha z}+\frac{B}{1-\beta z} = \frac{z}{1-z-z^2}\,,$$

pour obtenir une forme close $A\alpha^n + B\beta^n$ des coefficients F_n de z^n dans $F(z)$. Le membre gauche peut se réécrire

$$\frac{A}{1-\alpha z}+\frac{B}{1-\beta z} = \frac{A - A\beta z + B - B\alpha z}{(1-\alpha z)(1-\beta z)}\,.$$

On en déduit que les quatre constantes recherchées sont solutions des deux équations polynomiales suivantes :

$$(1-\alpha z)(1-\beta z) = 1 - z - z^2\,; \qquad (6.119)$$

$$(A+B) - (A\beta + B\alpha)z = z\,. \qquad (6.120)$$

Nous devons donc factoriser le dénominateur de $F(z)$ sous la forme $(1-\alpha z)(1-\beta z)$. Alors nous pourrons exprimer $F(z)$ comme une somme de deux fractions dans laquelle les facteurs $(1-\alpha z)$ et $(1-\beta z)$ seront convenablement séparés l'un de l'autre.

Notez que nous avons écrit les facteurs du dénominateur de (6.119) sous la forme $(1-\alpha z)(1-\beta z)$, et non sous la forme usuelle $c(z-\rho_1)(z-\rho_2)$, où ρ_1 et ρ_2 sont les racines. La raison en est que la forme que nous avons retenue se prête mieux au développement en série.

Il y a plusieurs façons de trouver α and β. L'une d'elles fait appel à une petite astuce : introduisons une nouvelle variable w et cherchons la factorisation

$$w^2 - wz - z^2 = (w-\alpha z)(w-\beta z)\,.$$

Celle-ci une fois trouvée, il suffit de poser $w = 1$ pour obtenir nos facteurs de $1 - z - z^2$. Voici les racines de $w^2 - wz - z^2 = 0$:

$$\frac{z \pm \sqrt{z^2+4z^2}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\,z\,.$$

Ainsi,

$$w^2 - wz - z^2 = \left(w - \frac{1+\sqrt{5}}{2}z\right)\left(w - \frac{1-\sqrt{5}}{2}z\right)$$

et nous avons nos constantes α et β.

Le nombre $(1+\sqrt{5})/2 \approx 1,61803$ occupe une place importante dans bien des domaines des mathématiques aussi bien que dans le monde des arts, car il est considéré depuis l'antiquité comme le rapport le plus esthétique dans toutes sortes de constructions. A ce titre, il a droit à un nom particulier : c'est le *nombre d'or*. On le désigne par la lettre grecque ϕ, en l'honneur du sculpteur Phidias qui en a, paraît-il, fait consciencieusement usage dans ses œuvres. L'autre racine, $(1-\sqrt{5})/2 = -1/\phi \approx -0,61803$ partage bien des propriétés de ϕ, c'est pourquoi elle est désignée par la symbole $\hat{\phi}$, "phi chapeau". Comme ces nombres sont racines de l'équation $w^2 - w - 1 = 0$, on a

D'après les observations de savants européens, le rapport entre la hauteur d'une personne et la hauteur de son nombril est à peu près égal à 1,618 [136].

$$\phi^2 = \phi + 1\,; \qquad \hat{\phi}^2 = \hat{\phi} + 1\,. \tag{6.121}$$

Nous en apprendrons davantage sur ϕ et $\hat{\phi}$ dans quelque temps.

Nous avons donc trouvé les constantes $\alpha = \phi$ et $\beta = \hat{\phi}$ de l'équation (6.119) ; il ne nous reste plus qu'à trouver A et B qui satisfont (6.120). Si on pose $z = 0$ dans cette équation, on trouve $B = -A$, et on se ramène à résoudre

$$-\hat{\phi}A + \phi A = 1\,.$$

La solution est $A = 1/(\phi - \hat{\phi}) = 1/\sqrt{5}$. Voici par conséquent le développement en éléments simples de (6.117) :

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\phi z} - \frac{1}{1-\hat{\phi}z}\right). \tag{6.122}$$

Bien. Nous avons notre $F(z)$ comme nous le voulions. Nous pouvons maintenant faire un développement en série de chacune des fractions pour trouver une forme close du coefficient de z^n :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \hat{\phi}^n)\,. \tag{6.123}$$

C'est Leonhard Euler [113] qui, le premier, publia cette formule en 1765, mais elle fut oubliée jusqu'à ce que Jacques Binet [31] la redécouvrît en 1843.

Avant de nous extasier devant notre résultat, vérifions qu'il est correct. Pour $n = 0$, la formule donne bien $F_0 = 0$; pour $n = 1$, elle donne $F_1 = (\phi - \hat{\phi})/\sqrt{5}$, ce qui vaut exactement 1. Pour les puissances plus élevées, les équations (6.121) montrent que les nombres définis par (6.123) satisfont

la récurrence de Fibonacci ; on déduit donc par induction que ce sont des nombres de Fibonacci. Pour faire cette vérification, nous aurions aussi pu développer ϕ^n et $\hat{\phi}^n$ avec la formule du binôme, mais cela aurait été plutôt fastidieux. Le but d'une forme close n'est pas forcément de nous fournir un moyen de calcul rapide, mais plutôt de nous faire connaître les liens d'une quantité donnée (ici F_n) avec les autres quantités mathématiques.

Avec un peu d'intuition, nous aurions pu simplement deviner la formule (6.123) et la prouver par induction. Ceci n'empêche pas la méthode des séries génératrices d'être un outil très puissant pour ce genre de problème. Nous verrons au chapitre 7 que cette même méthode peut résoudre des récurrences beaucoup plus difficiles. A propos, nous ne nous sommes pas préoccupés de savoir si les sommes que nous manipulions dans notre calcul de (6.123) convergeaient ou pas. En fait, la plupart des opérations que l'on fait sur ces sommes sont rigoureusement justifiées, qu'elles convergent ou non [182]. Il y a pourtant certainement des lecteurs qui se méfient encore des raisonnements sur des sommes infinies. Qu'ils se rassurent en sachant que (6.123) peut aussi se prouver sans problème par induction.

La formule (6.123) a plusieurs conséquences particulièrement intéressantes. Parmi celles-ci, on trouve le fait que l'entier F_n est extrêmement proche du nombre irrationnel $\phi^n/\sqrt{5}$ lorsque n est grand. En effet, comme $\hat{\phi}$ est plus petit que 1 en valeur absolue, $\hat{\phi}^n$ devient exponentiellement petit et son effet est négligeable. Par exemple, $F_{10} = 55$ et $F_{11} = 89$ sont très proches de

$$\frac{\phi^{10}}{\sqrt{5}} \approx 55,00364 \quad \text{et} \quad \frac{\phi^{11}}{\sqrt{5}} \approx 88,99775\,.$$

Cette observation mène à une nouvelle forme close,

$$F_n = \left\lfloor \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} \quad \text{arrondi à l'entier le plus proche,} \tag{6.124}$$

du fait que $\left|\hat{\phi}^n/\sqrt{5}\right| < \frac{1}{2}$ pour tout $n \geqslant 0$. Lorsque n est pair, F_n est un tout petit peu plus petit que $\phi^n/\sqrt{5}$; dans le cas contraire, il est un tout petit peu plus grand.

L'identité de Cassini (6.103) peut se réécrire

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} - \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{F_{n-1}\,F_n}\,.$$

Lorsque n est grand, $1/F_{n-1}\,F_n$ est très petit, donc F_{n+1}/F_n doit être proche de F_n/F_{n-1}. D'après l'expression (6.124), ce rapport est proche de ϕ. On peut en fait prouver, par induction ou directement en utilisant (6.123), que

$$F_{n+1} = \phi F_n + \hat{\phi}^n\,. \tag{6.125}$$

Le rapport F_{n+1}/F_n approche ϕ alternativement par valeur supérieure ou par valeur inférieure.

Par coïncidence, ϕ est aussi très proche du nombre de kilomètres dans un mile (le rapport exact est de $1,609344$, car 1 pouce vaut exactement $2,54$ centimètres). Cela nous donne un moyen pratique de convertir mentalement les kilomètres en miles et réciproquement, car une distance de F_{n+1} kilomètres est (avec une bonne approximation) égale à F_n miles.

Pour pouvoir vérifier le calcul, il faut aussi savoir qu'un mile vaut 1760 yards, qu'un yard vaut 3 pieds et qu'un pied vaut 12 pouces (N.d.T.).

Supposons que nous voulions convertir en miles un nombre de kilomètres qui n'est pas un nombre de Fibonacci. Combien y a-t-il de miles dans 30km ? Facile : il suffit de convertir mentalement 30 en sa représentation de Fibonacci $21 + 8 + 1$ par la méthode gloutonne que nous avons vue tout à l'heure, puis de décaler chaque nombre d'une unité vers le bas, pour obtenir $13 + 5 + 1$ (le "1" d'origine était F_2 car $k_r \gg 0$ dans (6.113), donc le nouveau "1"est F_1). Cette opération de décalage équivaut à peu près à une division par ϕ. Notre estimation est donc de 19 miles, ce qui est plutôt bon, puisque la bonne réponse est $18,64$ miles approximativement. Inversement, pour passer des miles aux kilomètres, on décale d'une unité vers le bas : 30 miles font à peu près $34 + 13 + 2 = 49$ kilomètres (c'est moins bon car la réponse correcte est à peu près $48,28$).

Si les Etats-Unis se mettent au système métrique, la limitation de vitesse passera de 55 mi/h à 89 km/h. A moins qu'ils ne nous laissent généreusement rouler à 90.

En fait, le décalage vers le bas donne le nombre arrondi de miles correct pour n kilomètres pour tout $n \leqslant 100$ sauf $n = 4, 12, 54, 62, 75, 83, 91, 96$, ou 99 ; dans ces cas, l'erreur est tout de même inférieure à $2/3$ de mile. De son côté, le décalage vers le haut donne soit le bon nombre de kilomètres pour n miles, soit un kilomètre de trop, pour tout $n \leqslant 113$. Le seul cas vraiment gênant est $n = 4 = 3 + 1$, où les deux erreurs d'arrondi vont dans le même sens au lieu de s'annuler.

Le décalage vers le bas transforme n en $f(n/\phi)$ et le décalage vers le haut transforme n en $f(n\phi)$, avec $f(x) = \lfloor x + \phi^{-1} \rfloor$.

6.7 CONTINUANTS

Les nombres de Fibonacci sont liés à l'arbre de Stern–Brocot que nous avons étudié au chapitre 4. Ils peuvent aussi être généralisés pour donner une suite de polynômes qui fut beaucoup étudiée par Euler. Ces polynômes sont appelés *continuants* car ils s'avèrent d'une importance capitale dans l'étude des fractions continues comme

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4}}}} . \tag{6.126}$$

Le continuant est un polynôme $K_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ à n variables défini